

Zur Theorie des heterogenen Piles

II. Störstellen im ebenen, geschichteten Pile

Von KURT MEETZ

Aus der Reaktorstation Karlsruhe *

(Z. Naturforsch. 12 a, 863—873 [1957]; eingegangen am 2. August 1957)

Im zweiten Teil dieser Betrachtungen zur Theorie des heterogenen Piles werden Störstellen im ebenen, geschichteten Pile behandelt. Das zugehörige Eigenwertproblem wird exakt gelöst für den Fall, daß ein Brennelement durch eine Schicht aus anderem Material ersetzt wird, das beliebige Absorptions- und Multiplikationseigenschaften haben kann. Die Lösungen werden aufgebaut aus den in Teil I¹ gewonnenen Grundlösungen für den ebenen, regulären Pile. Insbesondere ergeben sich auch auf einfache Weise Lösungen für eine Abschaltschicht, die in einer Gitterposition des ebenen Piles angebracht ist. Eine Reihe von Beispielen, in denen jeweils das zentrale Element durch absorbierende oder angereicherte Schichten ersetzt wird, beleuchtet das Verfahren.

I. Grundlagen des Verfahrens

Im ersten Teil¹ dieser Betrachtungen ist der ebene, regulär geschichtete Pile eingehend behandelt worden. Bevor wir nun Störstellen in dieser Anordnung untersuchen, also irgendwelche Änderungen in den Gitterpositionen, wollen wir mit Hilfe von Operatoren eine vereinfachte Schreibweise einführen, die

einen bequemen Zugang zur Behandlung von Störstellen bietet.

Betrachten wir also zunächst wieder den regulär geschichteten Pile, der sich von $-l$ bis $+l$ erstreckt und über $2N+1$ Brennstoffschichten der Breite $2a$ im Abstand d verfügt [s. I, Abb. 1]. Ferner soll sein: $2l = (2N+1)d$. Die Diffusionsgleichung für den thermischen Neutronenfluß Φ im Moderator lautet dann [s. I, (1)]:

$$D_M \frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \Sigma_M \Phi + q(x) = 0 \quad \text{und} \quad \Phi(\pm l) = 0, \quad (1)$$

wo [s. I, (3) und (5)]

$$q(x) = 2a \sum_{k=-N}^{+N} \Phi(kd) \left\{ \frac{\nu \Sigma_f}{\sqrt{4\pi\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{\frac{-(x-kd-4nl)^2}{4\tau}} - e^{\frac{-(x+kd-4l(n+1/2))^2}{4\tau}} \right) - \Sigma_B \delta(x-kd) \right\} \quad (2)$$

die Quelldichte thermischer Neutronen im Moderator ist (D_M : Diffusionskonstante, Σ_M : makroskopischer Absorptionsquerschnitt des Moderators, Σ_f^{eff} : effektiver makroskopischer Spaltungsquerschnitt, Σ_B^{eff} : effektiver makroskopischer Absorptionsquerschnitt des Brennelementes von der Breite $2a$ [vgl. I, (6)]; ν : Anzahl der pro Spaltung erzeugten Neutronen; τ : FERMI-Alter des Moderators).

Wir werden nun die Gln. (1) und (2) darstellen im HILBERT-Raum der Eigenfunktionen des Operators d^2/dx^2 mit $u(\pm l) = 0$. Die Basis besteht dann aus den Funktionen

$$u_m^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{l}} \cos(2m+1) \frac{\pi x}{2l} \quad \text{und} \quad u_m^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{m \pi x}{l}, \quad (3)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Ferner gilt

$$\delta(x-kd) = \sum_{\varrho=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(\varrho)}(x) u_n^{(\varrho)}(kd),$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{\frac{-(x-kd-4nl)^2}{4\tau}} - e^{\frac{-(x+kd-4l(n+1/2))^2}{4\tau}} \right\} = \sum_{\varrho=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha_n^{(\varrho)2\tau}} u_n^{(\varrho)}(x) u_n^{(\varrho)}(kd), \quad (4)$$

* Kernreaktor Bau- und Betriebsgesellschaft m. b. H. Karlsruhe.

¹ K. MEETZ, Z. Naturforsch. 12 a, 698 [1957]; im folgenden mit I zitiert.



wo
$$\alpha_n^{(1)2} = (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4l^2} \quad \text{und} \quad \alpha_n^{(2)2} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}.$$

Wir setzen nun für die Lösung Φ von (1) an:

$$\Phi = \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(\lambda)} u_m^{(\lambda)} \quad (5)$$

und denken uns in Zukunft Φ durch seinen Vektor $c_m^{(\lambda)}$ im HILBERT-Raum dargestellt. Die in (1) wirksamen Operatoren werden dann zu Matrizen. Multiplizieren wir zunächst (1) mit dem reziproken Operator

$$\frac{1}{\Sigma_M} \left(L_M^2 \frac{d^2}{dx^2} - 1 \right)^{-1},$$

so nimmt (1) die Form an:

$$\Phi = \nu \Sigma_f \mathbf{M}_+ \Phi - \Sigma_B \mathbf{M}_- \Phi \quad \text{und} \quad \Phi(\pm l) = 0. \quad (6)$$

Die Operatoren \mathbf{M}_+ und \mathbf{M}_- lauten in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} (M_+)^{(\lambda \varrho)}_{im} &= \frac{2a}{d \Sigma_M} \frac{d \sum_{k=-N}^{+N} e^{-\alpha_i^{(\lambda)2} \tau} u_i^{(\lambda)}(kd) u_m^{(\varrho)}(kd)}{1 + \alpha_i^{(\lambda)2} L_M^2} \\ (M_-)^{(\lambda \varrho)}_{im} &= \frac{2a}{d \Sigma_M} \frac{d \sum_{k=-N}^{+N} u_i^{(\lambda)}(kd) u_m^{(\varrho)}(kd)}{1 + \alpha_i^{(\lambda)2} L_M^2} \end{aligned} \quad \begin{matrix} \lambda, \varrho = 1, 2; \\ i, m = 0, 1, \dots \end{matrix} \quad (7)$$

Es gilt z. B.

$$\mathbf{M}_+ \Phi = \sum_{\varrho=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} (M_+)^{(\lambda \varrho)}_{im} c_m^{(\varrho)}.$$

Man sieht nun leicht aus (7), daß im Falle des regulären Piles die Matrizen in bezug auf λ, ϱ diagonal sind, so daß (6) in zwei Gleichungen zerfällt.

$$\nu \Sigma_f \mathbf{M}_+^{(11)} \Phi^{(1)} - \Sigma_B \mathbf{M}_-^{(11)} \Phi^{(1)} = \Phi^{(1)}, \quad (8a) \quad \nu \Sigma_f \mathbf{M}_+^{(22)} \Phi^{(2)} - \Sigma_B \mathbf{M}_-^{(22)} \Phi^{(2)} = \Phi^{(2)}, \quad (8b)$$

wo mit $\Phi^{(\lambda)}$ der Vektor $c_m^{(\lambda)}$ bezeichnet ist. Die Lösungen von (8a) sind die geraden, die von (8b) die ungeraden Lösungen des Problems.

Man gewinnt nun leicht Lösungen von (6) bzw. (8) mit Hilfe des Funktionensatzes [vgl. I, Gln. (21) und (29)]:

$$\begin{aligned} s_k^{(\mu)}(x) &= \frac{2a \sqrt{l}}{d \Sigma_M} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha_{N_0 m+k}^{(\mu)2} \tau}}{1 + \alpha_{N_0 m+k}^{(\mu)2} L_M^2} u_{N_0 m+k}^{(\mu)}(x), \\ s_k^{(\mu)}(x) &= \frac{2a \sqrt{l}}{d \Sigma_M} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{u_{N_0 m+k}^{(\mu)}(x)}{1 + \alpha_{N_0 m+k}^{(\mu)2} L_M^2}, \end{aligned} \quad \begin{matrix} \mu = 1, 2; \\ k = 0, \dots, N; \\ N_0 = 2N + 1. \end{matrix} \quad (9)$$

Setzen wir nämlich

$$\begin{aligned} \sigma_k^{(\mu)} &= \frac{2a}{d \Sigma_M} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha_{N_0 m+k}^{(\mu)2} \tau}}{1 + \alpha_{N_0 m+k}^{(\mu)2} L_M^2}, \\ \sigma_k^{(\mu)} &= \frac{2a}{d \Sigma_M} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \alpha_{N_0 m+k}^{(\mu)2} L_M^2}, \end{aligned} \quad \begin{matrix} \mu = 1, 2, \\ k = 0, \dots, N, \end{matrix} \quad (10)$$

so gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_+ s_k^{(\mu)}(x) &= \sigma_k^{(\mu)} s_k^{(\mu)}(x), \quad \mathbf{M}_- s_k^{(\mu)}(x) = \sigma_k^{(\mu)} s_k^{(\mu)}(x), \\ \mathbf{M}_+ s_k^{(\mu)}(x) &= \sigma_k^{(\mu)} s_k^{(\mu)}(x), \quad \mathbf{M}_- s_k^{(\mu)}(x) = \sigma_k^{(\mu)} s_k^{(\mu)}(x), \\ k &= 0, \dots, N; \quad \mu = 1, 2, \end{aligned} \quad (11)$$

wie man aus (7) mit Hilfe der Darstellung der Matrix $d \sum_{k=-N}^{+N} u_i^{(\lambda)}(kd) u_m^{(e)}(kd)$ ($\lambda, e = 1, 2$) [s. I, Gl. (12) und (24)] entnimmt.

Zur Lösung von (6) setzen wir nun an: $\Phi_k^{(\mu)} = a_k^{(\mu)} s_k^{(\mu)} + b_k^{(\mu)} s_k^{(\mu)}$, (12)

wo $a_k^{(\mu)}$ und $b_k^{(\mu)}$ zu bestimmende Konstanten bedeuten. Einsetzen von (12) in (6) liefert mit (11) die Bedingung

$$\begin{aligned} (\nu \Sigma_f s_k^{(\mu)} - \Sigma_B s_k^{(\mu)}) (a_k^{(\mu)} \sigma_k^{(\mu)} + b_k^{(\mu)} \sigma_k^{(\mu)}) \\ = a_k^{(\mu)} s_k^{(\mu)} + b_k^{(\mu)} s_k^{(\mu)}, \end{aligned}$$

woraus folgt, daß

$$a_k^{(\mu)} = \nu \Sigma_f, \quad b_k^{(\mu)} = -\Sigma_B, \quad (13a)$$

$$\nu \Sigma_f \sigma_k^{(\mu)} - \Sigma_B \sigma_k^{(\mu)} = 1, \quad \mu = 1, 2, \quad k = 0, \dots, N. \quad (13b)$$

Wir erhalten somit $N+1$ gerade Lösungen $\Phi_k^{(1)}$ von (8a):

$$\Phi_k^{(1)} = \nu_k^{(1)} \Sigma_f s_k^{(1)} - \Sigma_B s_k^{(1)} \quad (14a)$$

mit den Eigenwerten

$$\nu_k^{(1)} = \frac{1 + \Sigma_B \sigma_k^{(1)}}{\Sigma_f \sigma_k^{(1)}} \quad \text{für } k = 0, \dots, N \quad (14b)$$

und N ungerade Lösungen von (8b) (da $\Phi_0^{(2)} \equiv 0$):

$$\Phi_k^{(2)} = \nu_k^{(2)} \Sigma_f s_k^{(2)} - \Sigma_B s_k^{(2)} \quad (15a)$$

und den Eigenwerten

$$\nu_k^{(2)} = \frac{1 + \Sigma_B \sigma_k^{(2)}}{\Sigma_f \sigma_k^{(2)}} \quad \text{für } k = 1, \dots, N. \quad (15b)$$

II. Behandlung von Störstellen

Während wir uns in unseren Betrachtungen bisher auf den regulär geschichteten Pile beschränkt haben, in dem in den Gitterpunkten $x = kd$ ($k = -N, \dots, +N$) Brennelemente des gleichen Materials angeordnet sind, wollen wir nun den Fall untersuchen, daß in einem Gitterpunkt $x_p = k_p d$ ein Element aus anderem Material angebracht ist. Wir kennzeichnen seine Eigenschaften durch Σ_f^p (Spaltungsquerschnitt) und Σ_p (Absorptionsquerschnitt). Dabei sind für Σ_f^p und Σ_p beliebige Werte zugelassen; z. B. dürfen beide verschwinden, was dem Fall eines herausgezogenen Elementes entspricht, oder es verschwindet nur Σ_f^p , d. h. das Brennelement an der Stelle x_p wird durch ein Element aus absorbierendem Material ersetzt. Wir müssen lediglich voraussetzen, daß die Zahl der pro Spaltung freiwerdenden Neutronen in dem neuen Element genau so groß wie in den übrigen Elementen ist, damit wir ν weiterhin als einheitlichen Eigenwertparameter auffassen können.

Wir entnehmen aus (7) und (2), daß in diesem Fall in der Gl. (6) zusätzlich ein Operator \mathbf{M}_p auftritt, dessen Matrixelemente lauten:

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_+)_m^{(\lambda e)} &= \frac{2a}{d \Sigma_M} \frac{d e^{-\alpha_i^{(\lambda)} \tau} u_i^{(\lambda)}(x_p) u_m^{(e)}(x_p)}{1 + \alpha_i^{(\lambda)2} L_M^2}, \\ (\mathbf{M}_-)_m^{(\lambda e)} &= \frac{2a}{d \Sigma_M} \frac{d u_i^{(\lambda)}(x_p) v_m^{(e)}(x_p)}{1 + \alpha_i^{(\lambda)2} L_M^2}, \end{aligned} \quad \text{wo } \lambda, e = 1, 2, \quad i, m = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Dabei ist zunächst angenommen, daß die Breite des neuen Elementes ebenfalls $2a$ ist, was ohne Einschränkung der Allgemeinheit möglich ist (s. u.). Es seien

$$\Sigma_f^p = \Sigma_f + \Delta \Sigma_f \quad \text{und} \quad \Sigma_p = \Sigma_B + \Delta \Sigma_B.$$

Hier sind wieder die Effektivwerte der Wirkungsquerschnitte zu verwenden, definiert durch:

$$\Sigma_p^{\text{eff}} = \Sigma_p \frac{\sin \kappa_p a}{\kappa_p a}; \quad \Sigma_f^{\text{p eff}} = \Sigma_f^p \frac{\sin \kappa_p a}{\kappa_p a}.$$

[s. I, (6)]. (κ_p = reziproke Diffusionslänge in dem Material des Elementes bei x_p . Den Index „eff“ haben wir, wie schon früher, weggelassen.)

An die Stelle von Gl. (6) tritt nunmehr

$$\begin{aligned} \Phi &= (\nu \Sigma_f \mathbf{M}_+ - \Sigma_B \mathbf{M}_-) \Phi \\ &\quad + (\nu \Delta \Sigma_f \mathbf{M}_{+p} - \Delta \Sigma_B \mathbf{M}_{-p}) \Phi, \quad (17) \\ \Phi(\pm l) &= 0. \end{aligned}$$

Wir stellen zunächst fest, daß die Operatoren \mathbf{M}_{+p} und \mathbf{M}_{-p} im allgemeinen nicht mehr diagonal in bezug auf die Indizes λ, ϱ sind. Das gilt nur noch im Fall symmetrischer Störungen, z. B. $x_p = 0$, oder wenn in $+x_p$ und $-x_p$ die gleichen Änderungen durchgeführt werden; (17) zerfällt also im allgemeinen nicht mehr in zwei Gleichungen wie (6).

Die Operatoren \mathbf{M}_{+p} und \mathbf{M}_{-p} zeigen nun gleichfalls ein besonderes Verhalten, wenn man sie auf den Funktionensatz (9) anwendet. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{+p} s_k^{(\mu)}(x) &= d u_k^{(\mu)}(x_p) \sigma_k^{(\mu)} + \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{l=0}^N \varepsilon_l^{(\lambda)} u_l^{(\lambda)}(x_p) s_l^{(\lambda)}(x), \\ \mathbf{M}_{+p} \bar{s}_k^{(\mu)}(x) &= d u_k^{(\mu)}(x_p) \bar{\sigma}_k^{(\mu)} + \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{l=0}^N \varepsilon_l^{(\lambda)} u_l^{(\lambda)}(x_p) \bar{s}_l^{(\lambda)}(x), \\ \mathbf{M}_{-p} s_k^{(\mu)}(x) &= d u_k^{(\mu)}(x_p) \sigma_k^{(\mu)} + \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{l=0}^N \varepsilon_l^{(\lambda)} u_l^{(\lambda)}(x_p) \bar{s}_l^{(\lambda)}(x), \\ \mathbf{M}_{-p} \bar{s}_k^{(\mu)}(x) &= d u_k^{(\mu)}(x_p) \bar{\sigma}_k^{(\mu)} + \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{l=0}^N \varepsilon_l^{(\lambda)} u_l^{(\lambda)}(x_p) s_l^{(\lambda)}(x). \end{aligned} \quad (18)$$

Man erhält diese Beziehungen, wenn man die Matrizen (16) mit den Koeffizientenspalten der Funktionen (9) multipliziert und berücksichtigt, daß in einem Gitterpunkt x_p gilt:

$$\begin{aligned} s_k^{(\mu)}(x_p) &= \sqrt{l} u_k^{(\mu)}(x_p) \sigma_k^{(\mu)}, & \mu = 1, 2, \\ \bar{s}_k^{(\mu)}(x_p) &= \sqrt{l} u_k^{(\mu)}(x_p) \bar{\sigma}_k^{(\mu)}, & k = 0, \dots, N. \end{aligned} \quad (19)$$

Die Relationen (19) folgen unmittelbar aus der Definition (9) der Funktionen $s_k^{(\mu)}(x)$ mit (3) [s. auch I, (45)]. Für den Faktor $\varepsilon_k^{(\lambda)}$ gilt:

$$\varepsilon_k^{(\lambda)} = \begin{cases} 1 & k = 0 \dots N-1; \lambda = 1, 2, \\ & k = N; \lambda = 2, \\ \frac{1}{2} & k = N; \lambda = 1. \end{cases}$$

Er muß eingeführt werden, weil nach (9) in den Reihen für $s_N^{(1)}(x)$ jedes Glied zweimal auftritt, die Operatoren \mathbf{M}_{+p} und \mathbf{M}_{-p} aber jede Komponente nur einmal reproduzieren.

Wir definieren nun die Funktionen $\Phi_k^{(\lambda)}$ und $\dot{\Phi}_k^{(\lambda)}$ durch

$$\begin{aligned} \Phi_k^{(\lambda)} &= \nu \Sigma_f s_k^{(\lambda)} - \Sigma_B \bar{s}_k^{(\lambda)}, \\ \dot{\Phi}_k^{(\lambda)} &= \nu \Delta \Sigma_f s_k^{(\lambda)} - \Delta \Sigma_B \bar{s}_k^{(\lambda)} \end{aligned} \quad (20)$$

und setzen zur Lösung von (17) an:

$$\Phi = \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{k=0}^N a_k^{(\lambda)} \Phi_k^{(\lambda)} + b_k^{(\lambda)} \dot{\Phi}_k^{(\lambda)}. \quad (21)$$

Sei nun noch analog zu (20):

$$\begin{aligned} \sigma_k^{(\lambda)} &= \nu \Sigma_f s_k^{(\lambda)} - \Sigma_B \bar{s}_k^{(\lambda)}, \\ \dot{\sigma}_k^{(\lambda)} &= \nu \Delta \Sigma_f s_k^{(\lambda)} - \Delta \Sigma_B \bar{s}_k^{(\lambda)}, \end{aligned} \quad (22)$$

so erhalten wir mit (11):

$$(\nu \Sigma_f \mathbf{M}_+ - \Sigma_B \mathbf{M}_-) \Phi_k^{(\lambda)} = \sigma_k^{(\lambda)} \Phi_k^{(\lambda)}, \quad (23)$$

$$(\nu \Sigma_f \mathbf{M}_+ - \Sigma_B \mathbf{M}_-) \dot{\Phi}_k^{(\lambda)} = \dot{\sigma}_k^{(\lambda)} \Phi_k^{(\lambda)}$$

und mit (18):

$$\begin{aligned}
(\nu \Delta \Sigma_f \mathbf{M}_{+p} - \Delta \Sigma_B \mathbf{M}_{-p}) \Phi_k^{(\lambda)} &= d u_k^{(\lambda)} \sigma_k^{(\lambda)} \sum_{\varrho=1}^2 \sum_{l=0}^N \varepsilon_l^{(\varrho)} u_l^{(\varrho)} \Phi_l^{*(\varrho)}, \\
(\nu \Delta \Sigma_f \mathbf{M}_{+p} - \Delta \Sigma_B \mathbf{M}_{-p}) \Phi_k^{(\lambda)} &= d u_k^{(\lambda)} \sigma_k^{(\lambda)} \sum_{\varrho=1}^2 \sum_{l=0}^N \varepsilon_l^{(\varrho)} u_l^{(\varrho)} \Phi_l^{*(\varrho)},
\end{aligned}
\quad u_l^{(\varrho)}(x_p) = u_l^{(\varrho)}. \quad (24)$$

Die Funktionen $\Phi_k^{(\lambda)}$ sind also Eigenfunktionen des Operators $(\nu \Sigma_f \mathbf{M}_{+} - \Sigma_B \mathbf{M}_{-})$ mit den Eigenwerten $\sigma_k^{(\lambda)}$. Setzen wir nun (21) in (17) ein, so ergibt sich mit (23) und (24):

$$0 = \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{k=0}^N \Phi_k^{(\lambda)} \{a_k^{(\lambda)} (\sigma_k^{(\lambda)} - 1) + b_k^{(\lambda)} \sigma_k^{(\lambda)}\} + \sum_{\varrho=1}^2 \sum_{l=0}^N \Phi_l^{*(\varrho)} \left\{ \varepsilon_l^{(\varrho)} u_l^{(\varrho)} \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{k=0}^N d u_k^{(\lambda)} (a_k^{(\lambda)} \sigma_k^{(\lambda)} + b_k^{(\lambda)} \sigma_k^{(\lambda)}) - b_l^{(\varrho)} \right\}. \quad (25)$$

Da die Funktionen $\Phi_k^{(\lambda)}$ und $\Phi_k^{*(\lambda)}$ im allgemeinen voneinander linear unabhängig sind, entnehmen wir aus (25)

$$a_k^{(\lambda)} = -b_k^{(\lambda)} \frac{\sigma_k^{*(\lambda)}}{\sigma_k^{(\lambda)} - 1} \quad (26) \quad \text{und} \quad b_l^{(\varrho)} = d \varepsilon_l^{(\varrho)} u_l^{(\varrho)} \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{k=0}^N u_k^{(\lambda)} b_k^{(\lambda)} \frac{\sigma_k^{*(\lambda)}}{1 - \sigma_k^{(\lambda)}}. \quad (27)$$

Letztere Gleichung ist erfüllt, wenn:

$$b_l^{(\varrho)} = \varepsilon_l^{(\varrho)} u_l^{(\varrho)} \quad \text{und} \quad 1 = \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{k=0}^N \frac{d u_k^{(\lambda)2}(x_p) \sigma_k^{*(\lambda)} \varepsilon_k^{(\lambda)}}{1 - \sigma_k^{(\lambda)}}. \quad (28)$$

Damit haben wir die Aufgabe formal gelöst. Lösungen sind die Funktionen

$$\Phi(x, \nu) = \frac{d}{\nu l} \sum_{\varrho=1}^2 \sum_{k=0}^N \varepsilon_k^{(\varrho)} u_k^{(\varrho)}(x_p) \left(\Phi_k^{(\varrho)}(x, \nu) + \frac{\sigma_k^{*(\varrho)}(\nu)}{1 - \sigma_k^{(\varrho)}(\nu)} \Phi_k^{(\varrho)}(x, \nu) \right), \quad (29)$$

wenn die Eigenwerte ν aus der kritischen Gleichung

$$1 = \sum_{\varrho=1}^2 \sum_{k=0}^N \frac{d u_k^{(\varrho)2}(x_p) \sigma_k^{*(\varrho)}(\nu) \varepsilon_k^{(\varrho)}}{1 - \sigma_k^{(\varrho)}(\nu)} = \Phi(x_p, \nu), \quad (30)$$

bestimmt und in die allgemeine Definition der $\Phi_k^{(\lambda)}$ und $\Phi_k^{*(\lambda)}$ (20) eingesetzt werden. Die Eigenfunktionen (29) sind gemäß (30) und (19) so normiert, daß $\Phi(x_p) = 1$, können aber natürlich auch anders normiert werden. In Gitterpunkten $x = k d$ ($k = -N, \dots, +N$) reduzieren sich die Eigenfunktionen (29) mit Hilfe der Beziehungen (19) auf:

$$\Phi(x, \nu) = \sum_{\varrho=1}^2 \sum_{k=0}^N \frac{d u_k^{(\varrho)}(x_p) u_k^{(\varrho)}(x) \sigma_k^{*(\varrho)}(\nu) \varepsilon_k^{(\varrho)}}{1 - \sigma_k^{(\varrho)}(\nu)}, \quad x = k d; \quad (k = -N, \dots, +N). \quad (31)$$

Das Verfahren stößt auf eine Schwierigkeit, wenn in einem der Eigenwerte $\nu_{k_0}^{(\varrho_0)}$ des ungestörten Systems das entsprechende $\sigma_{k_0}^{*(\varrho_0)}$ verschwindet: $\sigma_{k_0}^{*(\varrho_0)}(\nu_{k_0}^{(\varrho_0)}) = 0$. In diesem Fall ist $\nu_{k_0}^{(\varrho_0)}$ auch ein Eigenwert des gestörten Systems. Da nämlich auch $\sigma_{k_0}^{(\varrho_0)}(\nu_{k_0}^{(\varrho_0)}) - 1 = 0$ ist, kann aus (25) nicht mehr auf (26) geschlossen werden, sondern $a_{k_0}^{(\varrho_0)}$ und $b_{k_0}^{(\varrho_0)}$ sind unbestimmt und können beliebige Werte annehmen. Aus der zweiten Summe in (25) erhalten wir nun im Punkte $\nu = \nu_{k_0}^{(\varrho_0)}$ die Bedingung:

$$b_l^{(\varrho)} = u_l^{(\varrho)} \varepsilon_l^{(\varrho)} \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{k=0}^N d u_k^{(\lambda)} \frac{\sigma_k^{*(\lambda)}}{1 - \sigma_k^{(\lambda)}} + d u_{k_0}^{(\varrho_0)} a_{k_0}^{(\varrho_0)} u_l^{(\varrho)} \varepsilon_l^{(\varrho)}. \quad (32)$$

Setzen wir wieder $b_l^{(\varrho)} = u_l^{(\varrho)}(x_p) \varepsilon_l^{(\varrho)}$, was wir auch für $b_{k_0}^{(\varrho_0)}$ dürfen, da $b_{k_0}^{(\varrho_0)}$ unbestimmt ist, so erhalten wir statt (28)

$$1 = \sum_{\varrho=1}^2 \sum_{k=0}^N \frac{d u_k^{(\varrho)2} \sigma_k^{*(\varrho)} \varepsilon_k^{(\varrho)}}{1 - \sigma_k^{(\varrho)}} + d u_{k_0}^{(\varrho_0)} a_{k_0}^{(\varrho_0)}. \quad (33)$$

Wir bestimmen $a_{k_0}^{(e_0)}$ aus (33) im Punkte $\nu = \nu_{k_0}^{(e_0)}$ und erhalten dann die zum Eigenwert $\nu_{k_0}^{(e_0)}$ gehörige Eigenfunktion mit (21)

$$\Phi(x, \nu_{k_0}^{(e_0)}) = \frac{d}{\sqrt{l}} \sum_{\varrho=1}^2 \sum_{k=0}^N \varepsilon_k^{(\varrho)} u_k^{(\varrho)} \Phi_k^{(\varrho)} + \frac{d}{\sqrt{l}} \sum_{\substack{\varrho=1 \\ \pm(k_0, e_0)}}^2 \sum_{k=0}^N \frac{\varepsilon_k^{(\varrho)} u_k^{(\varrho)} \Phi_k^{(\varrho)}}{1 - \sigma_k^{(\varrho)}} \Phi_k^{(\varrho)} + \frac{d}{\sqrt{l}} a_{k_0}^{(e_0)} \Phi_{k_0}^{(e_0)}, \quad (34)$$

die nach (33) und (19) wiederum so normiert ist, daß $\Phi(x_p) = 1$.

Liegen mehrere Störstellen vor, so kann man die Lösungen im allgemeinen nicht aus den Lösungen für eine Störstelle superponieren, da es sich allgemein nicht um kleine Störungen handelt, die eine Vernachlässigung der Wechselwirkung zwischen den Störstellen gestatten. Die in der Anordnung vorhandene Symmetrie wird hier bereits zu stark gestört, so daß man nicht mehr in einfacher Weise zu exakten Lösungen gelangt. Lediglich im Falle zweier symmetrischer, gleichartiger Störstellen x_p und $x_p' = -x_p$ ist unser Verfahren voll anwendbar und führt zu einer Superposition der Lösungen.

III. Änderungen am zentralen Element

Wir wollen nun die Verhältnisse genauer untersuchen für den Fall $x_p = 0$, der besonders leicht zu überblicken ist. Da die Störung symmetrisch ist, kommen nur die geraden Funktionen in Frage. Die Summation über ϱ in (29) und (30) fällt also fort; es bleiben nur Funktionen mit dem Index $\varrho = 1$, den wir in Zukunft fortlassen wollen:

$$u_k^{(e)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } \varrho = 1, \\ 0 & \text{für } \varrho = 2, \end{cases} \quad k = 0, \dots, N.$$

Die kritische Gleichung lautet also:

$$1 = \frac{d}{l} \sum_{k=0}^N \frac{\sigma_k^*(\nu) \varepsilon_k}{1 - \sigma_k(\nu)} \quad (35)$$

und die zugehörigen Eigenfunktionen:

$$\Phi(x, \nu) = \frac{d}{l} \sum_{k=0}^N \left\{ \frac{\sigma_k^*(\nu) \Phi_k(x, \nu)}{1 - \sigma_k(\nu)} + \Phi_k^*(x, \nu) \right\} \varepsilon_k. \quad (36)$$

Bedenkt man, daß die Eigenwerte des regulären Piles durch $\sigma_k(\nu) = 1$ ($k = 0, \dots, N$) bestimmt sind, so kann man mit (14 b) und (22) schreiben:

$$1 = \frac{d}{l} \sum_{k=0}^N \frac{\nu \Delta \Sigma_f^+ \sigma_k^+ - \Delta \Sigma_B^- \sigma_k^-}{(\nu_k - \nu) \Sigma_f^+ \sigma_k^+} \varepsilon_k = F(\nu). \quad (37)$$

Die Funktion $F(\nu)$ hat einfache Pole in $\nu = \nu_k$ und springt dort von $+\infty$ auf $-\infty$ oder umgekehrt. Untersuchen wir z. B. den Verlauf in der Umgebung von ν_0 . Der dominierende Term ist hier:

$$\frac{\sigma_0^*(\nu)}{(\nu_0 - \nu) \Sigma_f^+ \sigma_0^+}.$$

Wir unterscheiden folgende Fälle:

$$a) \quad \sigma_0^*(\nu_0) > 0.$$

$F(\nu)$ springt von $+\infty$ auf $-\infty$ in Richtung wachsender ν (Abb. 1). Da $F(\nu) = 1$ sein soll, ist der neue Eigenwert ν_0' kleiner als der ungestörte. Entsprechendes gilt für die anderen Eigenwerte.

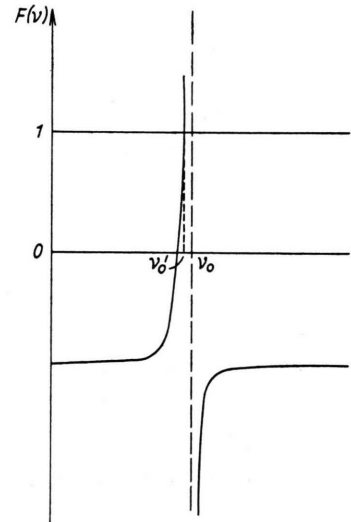


Abb. 1. Verlauf von $F(\nu)$ in der Umgebung von ν_0 bei einem zentralen Element aus rein absorbierendem Material.

$$b) \quad \sigma_0^*(\nu_0) < 0.$$

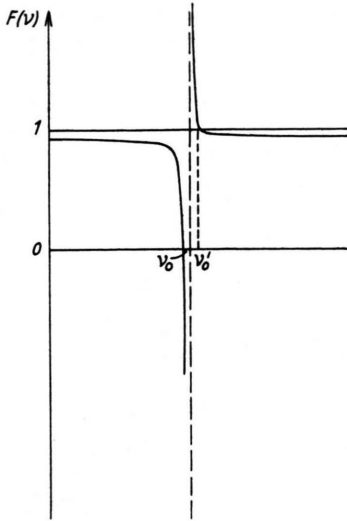
Der Sprung von F verläuft umgekehrt (Abb. 2). Man erhält also einen größeren Eigenwert.

$$c) \quad \sigma_0^*(\nu_0) = 0.$$

In diesem Fall liegt die Entartung vor, die wir im letzten Abschnitt behandelt haben. $F(\nu)$ ist in ν_0 regulär und ν_0 selbst Eigenwert $\nu_0' = \nu_0$.

Falls c) vorliegt, besteht ein bestimmtes Verhältnis von $\Delta \Sigma_f$ und $\Delta \Sigma_B$, das sich aus

$$\nu_0 \Delta \Sigma_f^+ \sigma_0^+ - \Delta \Sigma_B^- \sigma_0^- = 0$$

Abb. 2. Verlauf von $F(\nu)$ in der Umgebung von ν_0 bei Anreicherung des zentralen Elementes.

bestimmt. Die übrigen σ_k sind daher im allgemeinen jeweils an der Stelle $\nu = \nu_k$ ungleich Null, so daß $F(\nu)$ noch über N Pole verfügt. Das Verhältnis $\Delta\Sigma_t/\Delta\Sigma_B$ kann immer so gewählt werden, daß für irgendein σ_k gilt: $\sigma_k(\nu_k) = 0$ ($k=0, \dots, N$).

Für sehr große ν strebt $F(\nu)$ nach (37) gegen den asymptotischen Wert

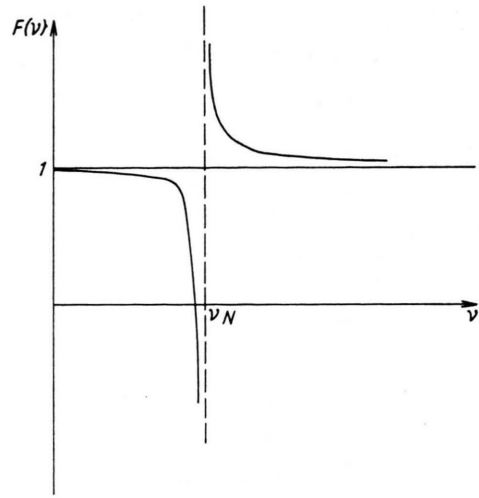
$$F_\infty = -\frac{d}{l} (N + \frac{1}{2}) \frac{\Delta\Sigma_t}{\Sigma_t} = -\frac{\Delta\Sigma_t}{\Sigma_t}. \quad (38)$$

Wir entnehmen daraus, daß sich die Anzahl der Eigenwerte im Falle $\Delta\Sigma_t = -\Sigma_t$ um Eins reduziert. Denn in diesem Fall ist $\sigma_N(\nu_N) < 0$ und $F(\nu)$ strebt von oben her asymptotisch gegen Eins, d. h. der $(N+1)$ -te Eigenwert ν_N strebt gegen unendlich, das nach I formal auch Eigenwert des regulären Systems ist (s. Abb. 3). Wir können also unsere Aussage, daß die Anzahl der Eigenwerte gleich der Anzahl der Schichten ist, schärfer so formulieren: Die Anzahl der Eigenwerte ist gleich der Anzahl der multiplizierenden Schichten.

Besondere Aufmerksamkeit verdient der Fall eines Abschalt-elementes in einem regulären Gitter. Er ist charakterisiert durch:

$$\Delta\Sigma_t = -\Delta\Sigma_t; \quad \Delta\Sigma_B \rightarrow \infty.$$

Dividieren wir die kritische Gl. (37) durch $\Delta\Sigma_B$ und führen den Grenzübergang aus, so bestimmen sich die Eigenwerte aus:

Abb. 3. Asymptotischer Verlauf von $F(\nu)$ für $\nu \rightarrow \infty$.

$$0 = \sum_{k=0}^N \frac{\bar{\sigma}_k \varepsilon_k}{(\nu - \nu_k) \sigma_k}. \quad (39)$$

Wird das Abschalt-element im Gitterpunkt x_p angebracht, so lautet die kritische Gleichung nach (30):

$$0 = \sum_{q=1}^2 \sum_{k=0}^N \frac{u_k^{(2)}(x_p) \bar{\sigma}_k^{(e)} \varepsilon_k^{(e)}}{(\nu - \nu_k^{(e)}) \sigma_k^{(e)}}. \quad (40)$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen (29) werden für $\Delta\Sigma_B \rightarrow \infty$ beliebig groß. Wir setzen daher in (29) $\Phi = \Delta\Sigma_B \Phi_A$ und erhalten nach Grenzübergang $\Delta\Sigma_B \rightarrow \infty$ die Eigenfunktionen Φ_A :

$$\Phi_A(x, \nu) = \frac{d}{Vl} \sum_{q=1}^2 \sum_{k=0}^N \varepsilon_k^{(e)} u_k^{(e)}(x_p) \cdot \left(\frac{\bar{\sigma}_k^{(e)}}{\sigma_k^{(e)}(\nu) - 1} \Phi_k^{(e)}(x, \nu) - \bar{s}_k^{(e)}(x) \right). \quad (41)$$

Es gilt $\Phi_A(x_p) = 0$ für alle Eigenfunktionen, wie aus (41) mit (40) folgt. Man erkennt das auch folgendermaßen: Die Funktionen (29) sind im Punkt x_p auf eins normiert. Daher gilt auch hier

$$\Phi(x_p) = \Delta\Sigma_B \Phi_A(x_p) = 1$$

$$\text{und} \quad \Phi_A(x_p) = \lim_{\Delta\Sigma_B \rightarrow \infty} 1/\Delta\Sigma_B = 0.$$

Φ_A ist somit durch (41) nur bis auf einen Faktor bestimmt.

Die so gewonnenen Lösungen für das Abschalt-element sind exakte Lösungen einer Zweigruppentheorie im heterogenen Pile, wobei die Gruppe der schnellen Neutronen durch die Quelldichte q_+ der

durch Abbremsung erzeugten thermischen Neutronen im Sinne der FERMI-age-Theorie repräsentiert ist.

Eine Reihe von Beispielen möge nun die obigen Ausführungen ergänzen. Wir beziehen uns dabei auf eine der Anordnungen, die in Teil I durchgerechnet worden sind, und zwar auf den Pile mit $2N+1=15$ Schichten in $d=15$ cm Abstand. Die Brennelemente bestehen aus natürlichem Uran ($\Sigma_B=0,358 \text{ cm}^{-1}$; $\Sigma_f=0,189 \text{ cm}^{-1}$). Der Moderator ist schweres Wasser ($\Sigma_M=8 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$; $L_M=100$ cm). Bei einer Breite der Brennelemente von $2a=3$ cm betragen die entsprechenden Effektivwerte: $\Sigma_f^{\text{eff}}=0,226 \text{ cm}^{-1}$ und $\Sigma_B^{\text{eff}}=0,429 \text{ cm}^{-1}$. Die Änderungen sollen stets am zentralen Element in $x=0$ durchgeführt werden. Wir interessieren uns dabei nur für den tiefsten Eigenwert ν_0' und die zugehörige Eigenfunktion $\Phi_0'(x)$ (gestrichene Größen beziehen sich auf den gestörten Pile). Die Funktionen Φ_0' sind dabei jeweils so normiert, daß der gestörte Pile die gleiche Leistung hat wie der ungestörte.

Die Leistung eines geschichteten Piles ist pro Flächeneinheit gegeben durch:

$$Q = \frac{d}{c} \sum_{k=-N}^{+N} \Sigma_f^{\text{eff}}(k d) \Phi_0(k d), \quad (42)$$

wo c die Anzahl der Spaltungen pro Wsec bedeutet und $\Sigma_f^{\text{eff}}(k d)$ den effektiven Spaltquerschnitt des Elementes an der Stelle $x=k d$. Im regulären Pile ist also die Leistung gegeben durch:

$$Q_0 = \frac{d}{c} \Sigma_f^{\text{eff}} \sum_{k=-N}^{+N} \Phi_0(k d). \quad (43)$$

Ist in $x=0$ ein anderes Element mit dem effektiven Spaltquerschnitt angebracht, so beträgt die Leistung:

$$Q_0' = \frac{d}{c} \left\{ \Sigma_f^{\text{eff}} \sum_{k=-N}^{+N} \Phi_0'(k d) + \Sigma_f^{p \text{ eff}} \Phi_0'(0) \right\}. \quad (44)$$

Folgende Fälle wurden behandelt:

1. Das zentrale Element fehlt.
2. Es wird ersetzt durch eine absorbierende Schicht von der Breite $2p$ und dem Absorptionsquerschnitt Σ_p . Der effektive Querschnitt ist in diesem Fall gegeben durch:

$$\Sigma_p^{\text{eff}} = \frac{p}{a} \Sigma_p \frac{\sin \kappa_p p}{\kappa_p p}.$$

Der Faktor p/a ermöglicht den zwanglosen Anschluß an den allgemeinen Formalismus. Vier Absorber verschiedener Stärke wurden eingesetzt:

- a) Schwacher Absorber: 1 cm reines Aluminium,
- b) „Uranabsorber“, d. h. ein Material, das die gleichen Absorptionseigenschaften wie natürliches Uran hat, aber nicht spaltbar ist,

- c) Starker Absorber: 1 cm Kobalt,
- d) Abschaltelement.

3. Das zentrale Element wird mit spaltbarem Material angereichert, hier also mit Uran-235, und zwar:

- a) auf 1,5%,
- b) auf 15%.

In Tab. 1 sind die Daten und Ergebnisse im einzelnen aufgeführt:

Beispiel	p (cm)	Σ_p (cm ⁻¹)	Σ_p^{eff} (cm ⁻¹)	Σ_f^p (cm ⁻¹)	$\Sigma_f^{p \text{ eff}}$ (cm ⁻¹)	$\Delta \Sigma_f^{\text{eff}}$ (cm ⁻¹)	$\Delta \Sigma_B^{\text{eff}}$ (cm ⁻¹)	Material	ν_0'	$\Delta \nu$ $= \nu_0' - \nu_0$
1	1,5	Σ_B	Σ_B^{eff}	Σ_f	Σ_f^{eff}	$-\Sigma_f^{\text{eff}}$	$-\Sigma_B^{\text{eff}}$	Brennelem.	1,9632	0,0084
2a	0,5	0,0139	$4,63 \cdot 10^{-3}$	—	—	$-\Sigma_f^{\text{eff}}$	-0,424	Aluminium	1,9882	0,0334
b	1,5	Σ_B	Σ_B^{eff}	—	—	$-\Sigma_f^{\text{eff}}$	0	Uranabs.	2,0955	0,1407
c	0,5	3,33	1,99	—	—	$-\Sigma_f^{\text{eff}}$	1,562	Kobalt	2,1000	0,1452
d	1,5	∞	∞	—	—	$-\Sigma_f^{\text{eff}}$	∞	Abschalt.	2,1014	0,1466
3a	1,5	0,609	0,855	0,397	0,557	0,331	0,426	1,5% ang.	1,8821	-0,0727
b	1,5	4,932	4,396	3,978	3,546	3,319	3,967	15% ang.	1,7650	-0,1898

Tab. 1.

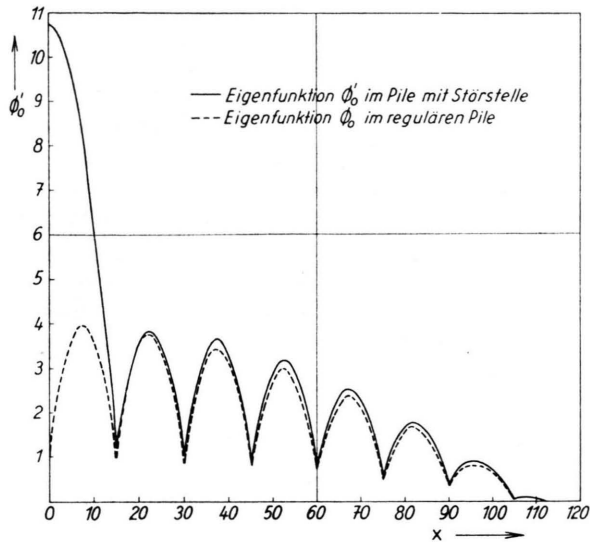


Abb. 4. Flußverteilung bei Fehlstelle im Zentrum.

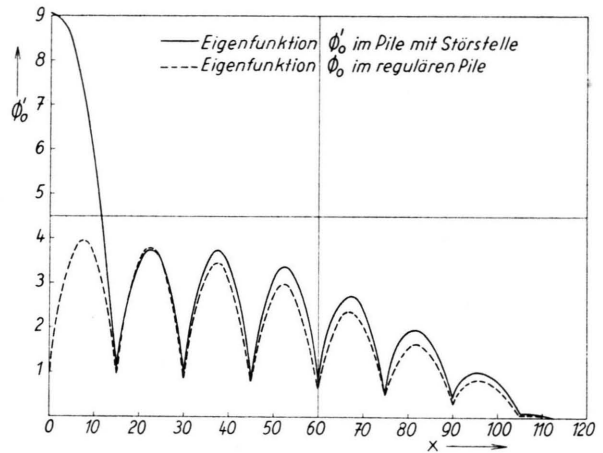


Abb. 5. Flußverteilung bei einer Schicht von 1 cm Aluminium im Zentrum.

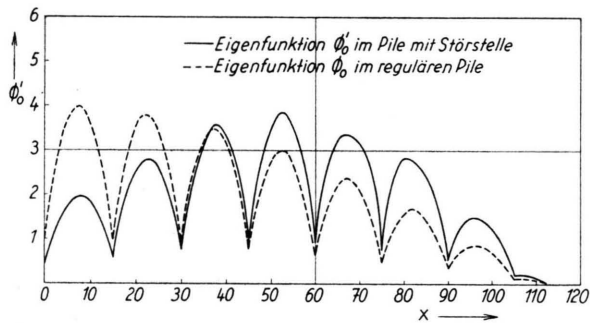


Abb. 6. Flußverteilung bei einer Schicht von 2 a=3 cm „Uranabsorber“ im Zentrum.

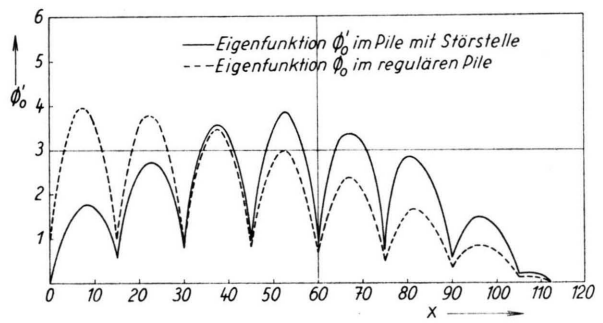


Abb. 7. Flußverteilung bei einer Schicht von 1 cm Kobalt im Zentrum.

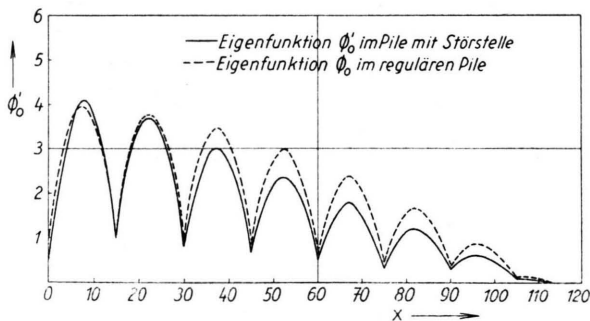


Abb. 8. Flußverteilung bei einem um 1,5% angereicherten zentralen Element.

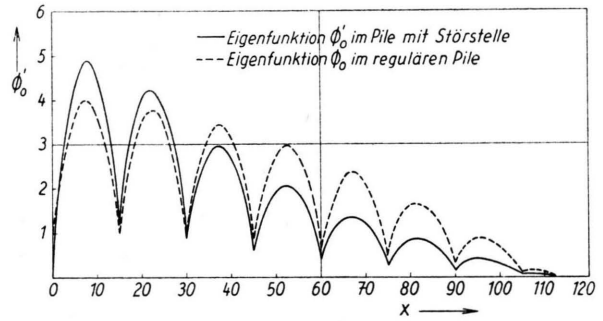


Abb. 9. Flußverteilung bei einem um 15% angereicherten zentralen Element.

Die zum kleinsten Eigenwert ν_0' gehörenden Eigenfunktionen $\phi_0'(x)$ sind in den Abb. 4–9 aufgetragen. Sie sind auf die gleiche Leistung normiert wie die stets mit eingezeichnete Eigenfunktion $\phi_0(x)$

des regulären Piles, für die $\phi_0(0) = 1$ gilt. Im Falle des eingebrachten Abschaltelementes ist die Flußverteilung fast die gleiche wie in Abb. 7. Sie ist daher nicht gesondert angeführt.

Fehlt das zentrale Brennelement (Abb. 4), so steigt der thermische Fluß an der Fehlstelle stark an. Zwei Effekte überlagern sich dabei: Einerseits ist ein relativ starker Absorber thermischer Neutronen entfernt worden, andererseits aber auch eine Quelle schneller Neutronen. Letzteres gibt zu einem Absinken der Quelldichte q_+ von durch Abbremsung erzeugten thermischen Neutronen Anlaß, in unserem Fall maximal auf $\exp(-d^2/4\tau) \approx 0,6$ ihres Wertes in den benachbarten Brennelementen. Die dadurch bedingte Absenkung wird jedoch mehr als aufgehoben durch die fehlende Absorption des zentralen Brennelementes, so daß im Endergebnis der thermische Fluß ansteigt. Da die Leistung konstant ge-

halten werden soll, müssen nun die restlichen 14 Elemente mehr Leistung abgeben, so daß die Flußwerte $\Phi'_0(kd)$ in den Gitterpunkten höher liegen als zuvor. Die somit erhöhte Neutronenabsorption in den Brennelementen bedingt ihrerseits einen größeren Gradienten des Flusses am Rand der Brennelemente, was zu einer Vergrößerung der Flußbeulen zwischen den Elementen führt.

In einem regulären Pile ist die Quelldichte der durch Abbremsung erzeugten thermischen Neutronen $q_+(x)$ in den Gitterpunkten $x = kd$ dem thermischen Neutronenfluß $\Phi_0(x)$ proportional.

Nach (2) und (4) ist q_+ gegeben durch:

$$q_+(x) = 2a\nu_0 \sum_{k=-N}^{+N} \Phi_0(kd) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha_n^2 \tau} u_n(kd) u_n(x), \quad (45)$$

da aus Symmetriegründen nur gerade Funktionen auftreten ($\varrho=1$). Nun ist nach (14 a, b) und (19)

$$\Phi_0(kd) = \sqrt{l} u_0(kd).$$

Also gilt

$$q_+(x) = \frac{2a}{d} \nu_0 \Sigma_t \sqrt{l} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha_n^2 \tau} u_n(x) d \sum_{k=-N}^{+N} u_0(kd) u_n(kd). \quad (46)$$

Verwendet man die Darstellung der Matrix $d \sum_{k=-N}^{+N} u_i(kd) u_m(kd)$ [s. I, (12)], so erhält man in Gitterpunkten $x = kd$ aus (45) mit (2) sofort die Beziehung

$$q_+(kd) = 2a\nu_0 \Sigma_t \Phi_0(kd) \frac{1}{d} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\alpha_{N_0+m}^2 \tau}. \quad (47)$$

Diese Proportionalität zwischen q_+ und Φ in den Gitterpunkten ist der Grund dafür, daß der Eigenwert des regulären Piles in guter Näherung (s. I, IV) durch das Homogenisierungs- oder das WIGNER-SEITZ-Verfahren ermittelt werden kann. Da aber, wie wir oben schon gesehen haben, diese Eigenschaft in der Umgebung einer Störstelle verloren geht, sind diese Verfahren zur Eigenwertbestimmung in gestörten Systemen nicht mehr anwendbar. Eine näherungsweise Berechnung der Eigenwerte ist nur möglich mit Hilfe einer Zwei-Medien-Zwei-Gruppenmethode, in der man den außerhalb der Störstelle homogenisierten Pile als ein Medium und die Umgebung der Störstelle als zweites nach der üblichen Zweigruppen-Methode behandelt, wobei man sich die Gruppe der schnellen Neutronen auch durch die Quelldichte $q_+(x)$ im Sinne der FERMI-age-Theorie dargestellt denken kann.

Wird nun in die Fehlstelle des Gitters ein Element aus absorbierendem Material eingesetzt, so ver-

ringert sich die Abweichung von der Proportionalität zwischen q_+ und Φ (Abb. 5–7), da die zusätzliche Absorption den thermischen Fluß wieder herabdrückt. Je stärker der Absorber ist, um so geringer wird die Abweichung. Bei einer Schicht von 1 cm Aluminium (Abb. 5) ist sie noch sehr groß, beim Uranabsorber wesentlich kleiner (Abb. 6) und noch geringer beim Kobalt (Abb. 7). Die zusätzliche Absorption in der Fehlstelle senkt auch den Fluß in den benachbarten Brennelementen ab, so daß q_+ noch weiter abfällt. Bei einem Abschaltelement ist schließlich $\Phi'_0(0) = 0$ (in Abb. 7 schon fast erreicht) und q_+ in der Umgebung des Abschaltelementes sehr klein, womit das proportionale Verhalten fast wieder hergestellt ist. Nimmt man streng proportionales Verhalten an, so wird der Pile durch das Abschaltelement halbiert [$\Phi(0) = q_+(0) = 0$]. Der Eigenwert für den halbierten Pile kann dann in sehr guter Näherung nach WIGNER-SEITZ bestimmt werden und liefert einen Näherungswert für den gesamten Pile mit Abschaltelement. In unserem Beispiel ist der

Eigenwert des halbierten Piles $\nu = 2,1314$, während der genaue Wert für das Abschaltetelement nach unserer Tabelle $\nu'_0 = 2,1014$ beträgt. Der halbierte Pile hat natürlich einen größeren Ausflußverlust an Neutronen, weil hier auch die schnellen Neutronen bei $x=0$ nach außen abfließen, die in Wirklichkeit durch das Abschaltetelement hindurch in die andere Hälfte des Piles eintreten.

Umgekehrt liegen die Verhältnisse bei einer Anreicherung des zentralen Elementes (Abb. 8 und 9). Die durch den größeren Spaltquerschnitt erhöhte Absorption im zentralen Element senkt den thermischen Fluß im 0-Punkt ab, die größere Zahl der Spaltungen erhöht jedoch die Quelldichte q_+ , so daß der Moderatorfluß in der Umgebung des zentralen Elementes ansteigt. Die Normierung auf gleiche Leistung bedingt nunmehr kleinere Werte des Flusses Φ'_0 in den äußeren Elementen; die Flußbeulen im Moderator zwischen den Brennelementen sind dann kleiner als zuvor.

Wenn auch eine Änderung an einem Element in einem Gitter von 15 zunächst eine relativ kleine Störung zu sein scheint, so ergibt doch unsere genaue Lösung, daß das nicht der Fall ist. Kehren wir

noch einmal zum Fall des herausgezogenen Elementes zurück. Nach (36) lautet die zugehörige Eigenfunktion $\Phi'_0(x)$:

$$\Phi'_0(x) = \frac{d}{l} \sum_{k=0}^N \frac{\Phi_k(\nu'_0, x) \varepsilon_k}{\sigma_k(\nu'_0) - 1}. \quad (48)$$

Sie reduziert sich in Gitterpunkten $x = kd$ auf die Form [s. (31)]:

$$\Phi'_0(x) = \frac{d}{l} \sum_{k=0}^N \frac{u_k(x) \sigma_k(\nu'_0) \varepsilon_k}{\sigma_k(\nu'_0) - 1} = \sum_{k=0}^N a_k u_k(x), \quad (49) \\ x = kd.$$

Die Koeffizienten a_k der im Null-Punkt auf eins normierten Funktion sind:

$$a_0 = 0,22; \quad a_1 \approx a_2 \approx \dots \approx a_6 \approx 0,12; \quad a_7 \approx 0,06.$$

Die Voraussetzung der Störungsrechnung, daß nämlich die Amplitude der Grundlösung a_0 sehr groß gegenüber den Amplituden der höheren Eigenfunktionen a_i ($i = 1, 2, \dots$) sei, ist also nicht erfüllt. In den anderen Beispielen ist das Verhältnis teilweise noch ungünstiger.

Zum Abschluß möchte ich den Damen Dipl.-Math. A. DÖDERLEIN und R. KUHN sehr herzlich danken für die Durchrechnung der verschiedenen Beispiele.

Magnetische Suszeptibilität von Fremdatomen in Halbleitern Theoretische Betrachtungen

Von D. GEIST

Aus dem II. Physikalischen Institut der Universität Köln
(Z. Naturforschg. **12 a**, 873—876 [1957]; eingegangen am 9. September 1957)

Der Beitrag von Störatomen zur magnetischen Suszeptibilität eines Halbleiters wird angegeben, insbesondere für solche Störatome, die nicht nur eines, sondern mehrere Elektronen abzuspalten vermögen.

Ein ideales Halbleitergitter besitzt als mögliche Energiezustände für die Elektronen Energiebereiche (Bänder), die durch verbotene Zonen getrennt sind. Werden in ein solches Gitter Fremdatome eingebaut, so verschieben diese eine entsprechende Anzahl von Bandtermen. Die modifizierten Terme sind um die Störstellen lokalisiert und fallen häufig in eine verbotene Zone des idealen Kristalls. Es ist möglich, daß ein spezielles Fremdatom nicht nur ein, sondern zwei oder mehrere Terme in der verbotenen Zone bedingt. Beispielsweise liefern in Silicium Elemente der fünften Gruppe (P, As, Sb) Donatoren mit einem Grundterm im verbotenen Band. Andererseits

scheint Gold zwei Terme verschiedener Energie zu liefern.

Störatome, die nur einen Term im verbotenen Gebiet bedingen, lassen sich durch das „Wasserstoffmodell“ beschreiben. Das Extradielektron des Donators benimmt sich analog zum 1s Elektron eines freien Wasserstoffatoms. Da ein Bahnmoment nicht vorhanden ist, wird das magnetische Verhalten durch den Spin bestimmt, zusammen mit einem kleinen diamagnetischen Anteil. Die resultierende Suszeptibilität wurde von MOOSER¹ angegeben.

¹ E. MOOSER, Phys. Rev. **100**, 1589 [1955].